BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CARTAN

Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 53-96
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__53_1>

LES GROUPES PROJECTIFS QUI NE LAISSENT INVARIANTE AUCUNE MULTIPLICITÉ PLANE;

PAR M. E. CARTAN.

J'indique dans ce Mémoire une génération de tous les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. Ces groupes sont tous simples ou semi-simples et leur étude revient à celle des groupes linéaires et homogènes qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane.

La génération obtenue repose sur la notion de groupes linéaires *fondamentaux*. Étant donnée une structure simple de rang l et d'ordre r, il existe l groupes linéaires particuliers g_1, g_2, ..., g_l

admettant cette structure, ne laissant invariante aucune multiplicité plane et jouissant de la propriété remarquable suivante : *Tout groupe linéaire* G *de la même structure ne laissant invariante aucune multiplicité plane peut se déduire par un procédé régulier de ces l groupes particuliers, dits « fondamentaux »*.

Pour arriver à cette génération on prend, d'une certaine manière, qui n'est d'ailleurs pas unique, une variable particulière appelée variable *dominante*, dans chaque groupe fondamental. Soit x_i la variable dominante de g_i. On se donne alors arbitrairement l entiers p_1, p_2, ..., p_l, *positifs* ou nuls, et l'on considère l'expression

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_l^{p_l}.$$

Lorsqu'on applique à cette expression les transformations du groupe g à r paramètres dont les équations s'obtiennent par la juxtaposition des équations de $g_1, g_2, \ldots, g_l$ (¹), cette expression se transforme en un certain nombre d'autres linéairement indépendantes.

Le groupe le plus général cherché G *indique comment le groupe g transforme linéairement toutes ces expressions.* Il dépend donc d'un système de l entiers positifs ou nuls.

Les groupes semi-simples s'engendrent d'une manière analogue. Si par exemple un groupe semi-simple est formé de deux sous-groupes simples, on engendrera tous les groupes linéaires G qui ont sa structure en prenant un groupe linéaire quelconque g de la première structure simple, aux variables x_1, x_2, ..., x_m; et un groupe linéaire quelconque g' de la seconde structure simple, aux variables y_1, ..., y_n. Le groupe le plus général cherché est celui qui indique comment les mn quantités $x_i y_k$ sont transformées linéairement entre elles, soit par les transformations de g, soit par celles de g'.

Les résultats ainsi obtenus comprennent en particulier ceux que l'on connaît déjà relativement à la génération des groupes projectifs à trois paramètres qui ne laissent invariante aucune multi-

---

(¹) Il faut naturellement supposer que tous ces groupes ont les mêmes paramètres en nombre r, ou encore que chaque transformation infinitésimale de g est la somme de l transformations infinitésimales correspondantes prises dans chacun des l groupes fondamentaux.

plicité plane : chacun d'eux indique en effet comment le groupe projectif de la droite transforme entre elles les expressions

$$x_1^p,\quad x_1^{p-1}x_2,\quad \ldots,\quad x_1x_2^{p-1},\quad x_2^p.$$

Je forme dans ce Mémoire les différents groupes fondamentaux correspondant aux différentes structures simples.

Les groupes fondamentaux du type (A) sont connus depuis longtemps : ce sont les groupes projectifs qui indiquent comment le groupe projectif de l'espace à l dimensions transforme les points, les droites, les multiplicités planes à 2 dimensions, etc., les multiplicités planes à $l-1$ dimensions de cet espace. Ces groupes sont respectivement à

$$C_{l+1}^1,\quad C_{l+1}^2,\quad C_{l+1}^3,\quad \ldots,\quad C_{l+1}^l$$

variables.

Parmi les groupes fondamentaux du type (B), l'un est le groupe projectif d'une quadrique dans l'espace à $2l$ dimensions; $l-2$ autres indiquent comment ce groupe projectif transforme dans cet espace les multiplicités planes à $1, 2, \ldots, l-2$ dimensions. Enfin, un dernier groupe fondamental est tout à fait à part; il est à 2^l variables; il indique comment le groupe projectif de la quadrique transforme les 2^l paramètres homogènes (surabondants) des multiplicités planes à $l-1$ dimensions qui engendrent la quadrique. D'ailleurs, ce dernier groupe fondamental peut servir, par un procédé que j'indique, à engendrer tous les autres groupes fondamentaux.

Les résultats relatifs au type (D) sont analogues, sauf que le groupe fondamental à 2^l variables est remplacé par deux groupes fondamentaux (d'ailleurs isomorphes) à 2^{l-1} variables.

Les groupes fondamentaux du type (C) se déduisent très facilement de l'un d'entre eux, qui est le groupe projectif d'un complexe linéaire de l'espace à $2l-1$ dimensions.

J'indique enfin la formation des groupes fondamentaux des types (E), (F) et (G). Des six groupes fondamentaux du type (E) ($l=6$), deux sont à 27 variables, un à 78, deux à 351 et un à 2925.

Les quatre groupes fondamentaux du type (F) sont respectivement à 26, 52, 273 et 1274 variables.

Enfin, les deux groupes fondamentaux du type (G) sont respectivement à 7 et 14 variables.

Je suppose dans tout ce qui suit qu'on a affaire à des variables et à des paramètres *complexes*. Je me propose de compléter ultérieurement les résultats précédents en ce qui concerne les groupes *réels* (1).

I. — Généralités. Poids, poids homologues.

1. Considérons un groupe linéaire et homogène à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et supposons que ce groupe ne laisse invariante aucune multiplicité plane. J'ai démontré précédemment (2) que ce groupe :

Ou bien est simple ou semi-simple;

Ou bien est formé d'un sous-groupe simple ou semi-simple et du groupe à un paramètre des transformations homothétiques

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

La détermination des groupes linéaires qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane revient donc à celle de ces groupes qui sont simples ou semi-simples.

2. On sait que les transformations infinitésimales d'un groupe semi-simple d'ordre r et de rang l peuvent être choisies de manière à satisfaire aux conditions suivantes (3) :

D'abord l de ces transformations $Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$ sont échangeables entre elles; ensuite les $r-l$ autres $X_1, \ldots, X_{r-l}$ satisfont aux relations

$$(Y_iX_k) = m_{ik}X_k \qquad (i=1, 2, \ldots, l;\ k=1, 2, \ldots, r-l),$$

---

(1) Je fais dans le cours de ce Mémoire des renvois fréquents à ma Thèse : *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*. Paris, Nony, 1894. Je la désignerai pour abréger par la notation *C*.

(2) *Les groupes de transformations continus, infinis, simples* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXVI, 1909, p. 99).

(3) *C*., Chap. IV, p. 61-67.

où les m_{ik} sont des coefficients constants. A chaque transformation X_k est associée une racine ω_k de l'équation caractéristique relative à la transformation infinitésimale $e_1 Y_1 + \ldots + e_l Y_l$. Ces $r - l$ racines sont des combinaisons linéaires à coefficients rationnels de l d'entre elles, linéairement indépendantes,

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_l$$

et l'on peut toujours choisir ces l racines (dites *fondamentales*) de manière que toutes les autres soient de la forme

$$\omega_\alpha = h_{\alpha 1}\omega_1 + \ldots + h_{\alpha l}\omega_l,$$

les $h_{\alpha i}$ étant entiers. Le crochet $(X_j X_k)$ de deux transformations X est un multiple non nul de la transformation X qui appartient à la racine $\omega_j + \omega_k$, si cette racine existe; dans le cas contraire, ce crochet est nul. Enfin, à deux quelconques ω_α, ω_β des $r - l$ racines ω est attaché un entier $a_{\alpha\beta}$ jouissant de la propriété que toutes les quantités qui font partie de la progression arithmétique de raison ω_β, et dont les termes extrêmes sont ω_α et $\omega_\alpha + a_{\alpha\beta}\omega_\beta$, sont des racines. Il existe de même un entier $a_{\beta\alpha}$. On a en particulier $a_{\alpha\alpha} = -2$. Enfin, si l'on a

$$\omega_\alpha = h_{\alpha 1}\omega_1 + \ldots + h_{\alpha l}\omega_l,$$

on a

$$a_{\alpha i} = h_{\alpha 1} a_{1i} + \ldots + h_{\alpha l} a_{li} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r - l).$$

3. Si un groupe semi-simple est linéaire et homogène à n variables, on peut choisir ces variables de manière que chacune ait un *poids* ϖ (¹). Ce poids ϖ est une combinaison linéaire à coefficients rationnels des l racines fondamentales $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l$:

$$(1) \qquad \varpi = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_l\omega_l.$$

Si x est une variable de poids ϖ, $X_\alpha(x)$ est une combinaison linéaire des variables de poids $\varpi + \omega_\alpha$.

Si l'on pose

$$a_\alpha = m_1 a_{1\alpha} + m_2 a_{2\alpha} + \ldots + m_l a_{l\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r - l),$$

(¹) *C.*, Chap. VIII, p. 127-153. Les poids ϖ sont ce que j'appelle, dans ma Thèse, les *racines secondaires*.

et si l'on considère les poids qui forment la progression arithmétique de raison ω_α et dont les termes extrêmes sont ϖ et $\varpi + b_\alpha \omega_\alpha$, il existe des variables de chacun de ces poids. De plus, il y a autant de variables de poids $\varpi + b_\alpha \omega_\alpha$ que de variables de poids ϖ. Nous désignerons en particulier le poids $\varpi + b_\alpha \omega_\alpha$ par la notation $S_\alpha \varpi$, et nous l'appellerons le poids *transformé de* ϖ *par la substitution* S_α. Si $\omega_{\alpha'} = - \omega_\alpha$, on a

$$S_{\alpha'} S_\alpha \varpi = \varpi.$$

Un poids ϖ sera dit un poids *frontière* s'il est impossible de trouver une racine ω_α telle qu'il y ait en même temps des variables de poids $\varpi + \omega_\alpha$ et des variables de poids $\varpi - \omega_\alpha$. Il y a évidemment des poids frontières; il suffit de prendre parmi les poids de toutes les variables du groupe, ceux pour lesquels le coefficient m_1 de la formule (1) est le plus grand; parmi ces poids, ceux pour lesquels le coefficient m_2 est le plus grand, et ainsi de suite. On arrive ainsi à un poids, que nous appellerons poids *dominant*, et qui est évidemment frontière.

Si ϖ est un poids frontière, il en est de même de $S_\alpha \varpi$. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi. Pour une certaine valeur de β, il existerait en même temps des variables de poids $S_\alpha \varpi + \omega_\beta$ et des variables de poids $S_\alpha \varpi - \omega_\beta$. Par suite, il existerait en même temps des variables de poids

$$S_{\alpha'}(S_\alpha \varpi + \omega_\beta) = \varpi + S_{\alpha'} \omega_\beta \qquad \text{et} \qquad S_{\alpha'}(S_\alpha \varpi - \omega_\beta) = \varpi - S_{\alpha'} \omega_\beta,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse, la quantité $S_{\alpha'} \omega_\beta$ étant une racine ω_γ.

On montre de la même manière que si ϖ n'est pas un poids frontière, $S_\alpha \varpi$ ne l'est pas non plus.

4. Nous appellerons poids *homologues* d'un poids donné ϖ tous les poids qui peuvent s'en déduire par les transformations S_α répétées un nombre quelconque de fois. Tous les poids homologues de ϖ sont de la forme

$$S_{\alpha_n} S_{\alpha_{n-1}} \dots S_{\alpha_1} \varpi;$$

il leur correspond à tous le même nombre de variables.

Si le groupe ne laisse invariante aucune multiplicité plane, *tous les poids frontières sont homologues entre eux et homologues du poids dominant.* Supposons, en effet, qu'il y ait des poids frontières qui ne soient pas homologues du poids dominant Π. Soit ϖ_0 le plus *haut* de ces poids frontières. Considérons alors toutes les variables dont le poids est ϖ_0 ou moins haut que ϖ_0. Je dis que ces variables sont transformées entre elles par le groupe. Si, en effet, une de ces variables donnait, en lui appliquant la transformation X_α, une nouvelle variable de poids plus haut que ϖ_0, le poids ϖ de cette variable ferait partie d'une progression arithmétique de raison ω_α; le terme $\varpi+\omega_\alpha$ de cette progression serait un poids plus haut que ϖ_0; il y aurait donc un poids frontière de la forme $\varpi + h\omega_\alpha$ $(h \geqq 1)$ qui serait nécessairement homologue de ϖ_0. Or, la transformation S_α, appliquée à ce poids frontière donnerait un poids homologue de la forme $\varpi - h'\omega_\alpha$ $(h' \geqq 0)$, et par suite moins haut que ϖ_0, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les variables considérées étant transformées par le groupe, on obtient, en les égalant à zéro, les équations d'une multiplicité plane invariante par le groupe, ce qui est encore contraire à l'hypothèse.

Il résulte de là que *dans tout groupe linéaire qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane, tout poids frontière détermine tous les autres points frontières.*

II. — Groupes isomorphes de même poids dominant.

5. Nous allons maintenant démontrer que *si deux groupes linéaires isomorphes ne laissant invariante aucune multiplicité plane ont le même poids dominant, ils sont semblables.*

Prenons en effet dans le premier groupe une variable u ayant pour poids le poids dominant. Considérons toutes les expressions de la forme

$$X_{\alpha_n} X_{\alpha_{n-1}} \ldots X_{\alpha_1} u, \tag{2}$$

où Xu est mis à la place de $X(u)$, $XX'u$ à la place de $X[X'(u)]$ et ainsi de suite.

Ces expressions (2) en nombre infini peuvent être rangées dans une suite linéaire. Chacune d'elles est une combinaison linéaire des variables de même poids. Soient

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

ces expressions.

Partons de même d'une variable v du second groupe admettant pour poids le poids dominant et formons sur v les expressions analogues à (2). Soient

$$v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad \ldots.$$

Chaque v_i est de même poids que l'expression u_i correspondante. On peut d'ailleurs supposer $u_1 = u$, $v_1 = v$.

6. Considérons parmi les expressions (2) celles qui sont du poids dominant ϖ; nous allons d'abord démontrer qu'elles sont de la forme ku, k étant un coefficient numérique qui ne dépend que du poids dominant, ainsi que des indices α_i qui entrent dans la formation de l'expression (2) considérée.

Chaque racine ω_{α_i} est de la forme

$$\omega_{\alpha_i} = m_{i1}\omega_1 + m_{i2}\omega_2 + \ldots + m_{il}\omega_l,$$

et l'on a évidemment

$$\omega_{\alpha_1} + \omega_{\alpha_2} + \ldots + \omega_{\alpha_n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma m_{i1} = 0, \qquad \Sigma m_{i2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Sigma m_{il} = 0.$$

Supposons que l'un au moins des coefficients m_{i1} soit différent de zéro; alors l'un d'eux est positif; supposons que h soit la plus petite valeur de i pour laquelle cela a lieu. Nous allons d'abord montrer que l'expression considérée (2) est une combinaison linéaire d'expressions analogues de même poids ϖ, *mais pour lesquelles le nombre n est plus petit.*

En effet, si d'abord tous les coefficients

$$m_{11}, \quad m_{21}, \quad \ldots, \quad m_{h-1,1}$$

sont nuls, l'expression (2) est identiquement nulle, car, sinon le poids de l'expression

$$X_{\alpha_h} X_{\alpha_{h-1}} X_{\alpha_{h-2}} \ldots X_{\alpha_1} u$$

serait

$$\varpi' = \varpi + \omega_{\alpha_1} + \omega_{\alpha_2} + \ldots + \omega_{\alpha_{h-1}} + \omega_{\alpha_h},$$

et le coefficient de ω_1 dans ϖ' est supérieur au coefficient de ω_1 dans ϖ, qui ne serait pas ainsi le poids dominant.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général. On a

$$X_{\alpha_n}\ldots X_{\alpha_h}X_{\alpha_{h-1}}\ldots X_{\alpha_1}u$$
$$= X_{\alpha_n}\ldots(X_{\alpha_h}X_{\alpha_{h-1}})X_{\alpha_{h-2}}\ldots X_{\alpha_1}u + X_{\alpha_n}\ldots X_{\alpha_{h-1}}X_{\alpha_h}X_{\alpha_{h-2}}\ldots X_{\alpha_1}u.$$

Pour la première expression du second membre le nombre n est diminué d'une unité, à moins que $\omega_{\alpha_{h-1}} + \omega_{\alpha_h}$ ne soit nul; dans ce cas le crochet $(X_{\alpha_h}X_{\alpha_{h-1}})$ est une combinaison linéaire des transformations Y, et son effet sur l'expression $X_{\alpha_{h-2}}\ldots X_{\alpha_1}u$ est de la multiplier par un facteur numérique qui ne dépend que de son poids et de α_h [1]; le nombre n est alors réduit de deux unités. Dans la seconde expression du second membre, au contraire, n n'est pas changé; mais l'indice h est diminué d'une unité. En raisonnant sur cette seconde expression comme sur la première, on fera avancer la transformation X_{α_h} jusqu'à ce qu'il n'y ait plus après elle aucun indice α_i pour lequel m_{i1} soit négatif; alors on sera arrivé à une expression identiquement nulle.

On pourra ainsi réduire de proche en proche le nombre n tant qu'il restera des indices α_i pour lesquels m_{i1} n'est pas nul. La réduction aura une fin puisque n ne peut descendre au-dessous de 2 sans être nul.

Lorsqu'il n'y aura plus aucun indice α_i pour lequel m_{i1} soit différent de zéro, on raisonnera sur les indices pour lesquels m_{i2} n'est pas nul, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait fait disparaître toutes les transformations X.

L'expression primitive se trouvera finalement de la forme ku, k ne dépendant pas du groupe linéaire considéré, mais uniquement du poids ϖ et des indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

7. Considérons maintenant les expressions, en nombre infini,

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots.$$

Elles sont toutes des combinaisons linéaires d'un nombre fini

---

[1] Cela résulte d'un théorème d'après lequel Yu est un multiple de u, *si le poids de u n'est pas nul*. Ce théorème résulte au fond des propriétés connues des groupes linéaires simples à trois paramètres. *Voir* aussi *C*, p. 99-102.

d'entre elles, nombre au plus égal au nombre des variables du groupe. Soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_p$$

ces combinaisons indépendantes, dont chacune a un poids déterminé.

La multiplicité plane

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$$

est évidemment invariante par le groupe, puisque chaque expression $X_\alpha x_i$ est une des expressions u_i, et par conséquent combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_p$. Il faut donc, puisque le groupe n'admet aucune multiplicité plane invariante, que toute variable du groupe soit une combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_p$.

On voit de plus (5), que parmi les expressions $x_1, x_2, \ldots, x_p$, une seule est du poids dominant ϖ; donc, *si un groupe linéaire ne laisse invariante aucune multiplicité plane, il existe une seule variable ayant pour poids le poids dominant, et par suite aussi une seule variable, ayant pour poids un poids frontière.*

8. Supposons, maintenant, ce qui est toujours possible, qu'on ait pris

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_{i_2}, \quad x_3 = u_{i_3}, \quad \ldots, \quad x_p = u_{i_p} \quad (1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_p),$$

et considérons les relations linéaires qui expriment :

$u_2, \ldots, u_{i_2-1}$ en fonction de u_1;
$u_{i_2+1}, \ldots, u_{i_3-1}$ en fonction de u_1, u_{i_2};
$u_{i_3+1}, \ldots, u_{i_4-1}$ en fonction de u_1, u_{i_2}, u_{i_3};
. . . .

Si l'on considère les *mêmes* relations entre les v de même indice, il se peut *a priori* qu'un certain nombre de ces relations *ne soient pas identiques;* elles exprimeraient alors des relations entre les variables du second groupe, chaque relation ne contenant que des variables de même poids. Supposons que q de ces relations soient indépendants et soient

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_q$$

leurs premiers membres. *Le groupe échange entre elles les quantités* $V_1, \ldots, V_q$. En effet, si l'on applique à l'une d'elles V_i la transformation X_α, on obtient une expression qui, égalée à zéro, donne une relation entre les v_i; *et la relation analogue entre les u_i est identique.*

D'autre part, parmi les V_i, il n'y en a aucune de poids ϖ, parce que, d'après (5), toute relation entre les u_i de poids ϖ est de la forme $u_i = k_i u$ et que le coefficient k_i est le même pour les v que pour les u.

Si donc q n'était pas nul, le second groupe linéaire aux variables v admettrait une multiplicité plane invariante, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il résulte de là que si l'on établit entre les variables u et les variables v les relations $v_i = u_i$, relations qui n'introduisent aucune relation entre les variables v ni entre les variables u, les deux groupes deviennent identiques, puisque si $X_\alpha u_i = u_j$, on a aussi $X_\alpha v_i = v_j$. Par conséquent, si *deux groupes linéaires isomorphes qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, admettent le même poids dominant, ils sont semblables.*

La même conclusion subsiste évidemment s'ils ont un poids frontière commun.

9. La démonstration précédente montre comment on peut former tous les poids d'un groupe linéaire ne laissant invariante aucune multiplicité plane, dès que l'on connaît un poids frontière ϖ_0.

On forme d'abord les poids homologues de ϖ_0, ce qui donne tous les poids frontières.

On considère ensuite chaque substitution S_α telle que

$$S_\alpha \varpi_0 = \varpi_0 + h\omega_\alpha,$$

l'entier h étant plus grand que 1 ; et l'on prend les poids

$$\varpi_0 + \omega_\alpha, \quad \ldots, \quad \varpi_0 + \left[\frac{h}{2}\right]\omega_\alpha.$$

On obtient ainsi un certain nombre de poids nouveaux, non frontières, dont on détermine les homologues. Cela donne un certain nombre de systèmes de poids homologues.

Dans chacun de ces systèmes on prend un poids particulier sur lequel on fait les mêmes opérations qu'on vient de faire sur ϖ_0 et ainsi de suite, jusqu'à ce que ces opérations ne soient plus possibles.

On obtient ainsi un certain nombre de systèmes de poids homologues, les poids d'un même système correspondant au même nombre de variables du groupe linéaire.

III. — Produit de deux groupes linéaires isomorphes.

10. Considérons deux groupes linéaires g_1 et g_2 n'admettant aucune multiplicité plane invariante et isomorphes entre eux. Supposons d'une manière plus générale qu'ils soient isomorphes (holoédriques ou mériédriques) d'un même groupe semi-simple G. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les variables du premier; soient $y_1, y_2, \ldots, y_q$ les variables du second.

Prenons l racines fondamentales $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l$ du groupe G et soient, par rapport à ces racines, ϖ le poids dominant de g_1 et ϖ' le poids dominant de g_2. Nous pouvons supposer que x_1 est la variable unique de poids ϖ, y_1 la variable unique de poids ϖ'.

Si nous considérons les différents produits $x_i y_k$, ils sont échangés entre eux d'une manière linéaire, définissant ainsi un groupe linéaire à pq variables. Partons maintenant du produit $x_1 y_1$ et appliquons-lui successivement et plusieurs fois de suite les différentes transformations du groupe. Nous obtiendrons un certain nombre de combinaisons linéaires $z_1, z_2, \ldots, z_r$ des produits $x_i y_k$, chacune d'elles étant formée de produits tous de même poids. Le groupe qui indique comment ces r quantités $z_1, z_2, \ldots, z_r$ sont transformées est un groupe linéaire qui ne laisse évidemment invariante aucune multiplicité plane. Nous l'appellerons *le produit* des deux groupes donnés. Son poids dominant est égal à la somme des poids dominants des deux groupes.

Ce qui précède prouve donc l'existence d'un groupe linéaire admettant pour point dominant la somme des poids dominants de deux groupes donnés et donne un procédé simple pour construire ce groupe.

11. Nous allons maintenant montrer que le poids du groupe

produit s'obtient en faisant, *de toutes les manières possibles et sans exception*, la somme d'un poids du premier groupe facteur et d'un poids du second groupe facteur.

Considérons en effet les équations finies du groupe g_1 et soit

$$x'_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_p x_p$$

l'équation qui donne la variable x'_1 transformée de x_1. *Il n'y a aucune relation linéaire à coefficients constants entre* a_1, a_2, $\ldots$, a_p; car s'il y en avait une on pourrait choisir les variables de manière à avoir $a_{p'+1} = \ldots = a_p = 0$ sans qu'il y ait aucune relation linéaire à coefficients constants entre $a_1, \ldots, a_{p'}$.

On démontrerait alors facilement, en utilisant la propriété qui sert de définition aux groupes, que la multiplicité plane

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$$

est invariante par le groupe.

Soit de même

$$y'_1 = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_q y_q$$

l'équation qui donne la variable y'_1 transformée de y_1 par la transformation la plus générale du groupe g_2. On en déduit

$$x'_1 y'_1 = \Sigma a_i b_k x_i y_k.$$

Si i et k sont deux indices quelconques ($i \leqq p$, $k \leqq q$), le coefficient $a_i b_k$ de $x_i y_k$ n'est pas nul, puisque ni a_i ni b_k ne le sont; il n'est pas non plus constant (si i et k ne sont pas tous les deux égaux à 1), puisqu'il doit se réduire à zéro pour la transformation identique de G. Ce coefficient $a_i b_k$ dépend donc effectivement des paramètres de G. Par suite, si l'on pose

$$x_i y_k = z_{ik},$$

l'une des transformations infinitésimales du groupe qui transforme les $z_{\alpha\beta}$ est de la forme

$$(h z_{ik} + \ldots) \frac{\partial f}{\partial z_{11}} + \ldots.$$

Il résulte de là que le groupe produit défini plus haut contient la variable $hz_{ik} + \ldots$; autrement dit l'un des poids du groupe produit est la somme du poids de la variable x_i et du poids de la variable y_k. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème prouve que le *groupe produit est indépendant de la définition particulière donnée au préalable du poids dominant*. Les poids frontières sont tous la somme d'un poids frontière de g_1 et d'un poids frontière de g_2.

IV. — Les groupes linéaires fondamentaux.

12. Nous allons maintenant démontrer qu'étant donnée une structure simple de rang l, *il existe l groupes linéaires particuliers de cette structure, ne laissant invariante aucune multiplicité plane et tels que tout autre groupe linéaire isomorphe ne laissant invariante aucune multiplicité plane puisse être regardé comme le produit de deux ou plusieurs de ces groupes, chacun d'eux pouvant entrer plusieurs fois comme facteur.*

Autrement dit *on peut trouver l groupes linéaires g_1, g_2, ..., g_l tels que si* $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_l$ *sont leurs poids dominants, le poids dominant de tout autre groupe linéaire de même structure soit de la forme*

$$p_1\Pi_1 + p_2\Pi_2 + \ldots + p_l\Pi_l,$$

où les coefficients p_i sont des entiers non négatifs.

Ces l groupes s'appelleront les *groupes fondamentaux* de la structure donnée.

Remarquons d'abord qu'on ne peut pas trouver deux systèmes différents de l groupes fondamentaux, et cela quelle que soit la définition donnée au préalable des poids dominants. Car si avec une deuxième définition on arrivait à trouver l nouveaux groupes fondamentaux $g'_1, g'_2, \ldots, g'_l$, leurs poids dominants, à *l'ancien sens*, seraient de la forme

$$p_{i1}\Pi_1 + p_{i2}\Pi_2 + \ldots + p_{il}\Pi_l \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Chacun g_i des l premiers groupes fondamentaux serait alors un produit de la forme

$$g_1'^{q_{i1}} g_2'^{q_{i2}} \ldots g_l'^{q_{il}},$$

et, d'après le n° 9, contiendrait tous les poids obtenus en ajoutant de toutes les manières possibles le poids de chaque facteur. Son poids dominant, *à l'ancien sens*, serait donc

$$\Sigma q_{ij} p_{ik} \Pi_k = \Pi_i.$$

On en déduit facilement l'identité des deux systèmes. Il n'y aurait qu'un cas où la conclusion serait douteuse, c'est celui où un des poids Π_i serait déjà une somme de multiples, positifs ou nuls, des autres. Dans ce cas la représentation de tout poids dominant au moyen des poids fondamentaux ne serait pas unique : mais nous verrons, pour chaque type de groupes simples, que ce cas ne se présente pas.

La détermination des groupes fondamentaux de chaque structure simple étant supposée faite, on en déduit facilement tous les groupes linéaires (ne laissant invariante aucune multiplicité plane) de structure semi-simple donnée. Si cette structure résulte de la composition de plusieurs sous-groupes simples, on considérera les groupes fondamentaux relatifs à ces différentes structures simples et l'on formera tous les groupes produits de ces groupes fondamentaux. Ici aussi ces groupes fondamentaux sont en nombre l, l étant le rang du groupe. Mais ils ne sont qu'isomorphes mériédriques au groupe semi-simple donné.

Nous allons maintenant passer en revue les différents types de groupes simples. Nous commencerons d'abord par la détermination des l poids dominants fondamentaux $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_l$, et nous démontrerons ensuite l'existence de groupes linéaires admettant ces poids fondamentaux.

V. — Poids fondamentaux du type A).

13. Ici les racines sont de la forme

$$\overline{\omega}_i - \overline{\omega}_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, l+1),$$

où les $l+1$ quantités $\overline{\omega}_i$ sont liées par la relation

$$\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots + \overline{\omega}_{l+1} = 0.$$

Tout poids ϖ est de la forme

$$\varpi = m_1 \overline{\omega}_1 + m_2 \overline{\omega}_2 + \ldots + m_{l+1} \overline{\omega}_{l+1},$$

où les coefficients m_i peuvent toujours être supposés liés par la relation

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{l+1} = 0.$$

Si $\quad \omega_\alpha = \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j,$

on a $\quad b_\alpha = -m_i + m_j;$

par suite les coefficients m_i diffèrent entre eux de nombres entiers, ce sont donc des fractions ayant pour dénominateur $l+1$.

Pour définir le poids dominant, nous prendrons tous les poids pour lesquels m_1 est maximum, puis parmi ceux-là, tous ceux pour lesquels m_2 est maximum, et ainsi de suite. Pour qu'un poids soit dominant, il faut et il suffit qu'on ait

$$m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_{l+1}.$$

14. Parmi les poids dominants possibles nous pourons prendre les l suivants :

$$\Pi_1 = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \ldots + \bar{\omega}_l - l\bar{\omega}_{l+1}}{l+1} = -\bar{\omega}_{l+1},$$

$$\Pi_2 = \frac{2\bar{\omega}_1 + 2\bar{\omega}_2 + \ldots + 2\bar{\omega}_{l-1} - (l-2)\bar{\omega}_l - (l-2)\bar{\omega}_{l+1}}{l+1} = -\bar{\omega}_l - \bar{\omega}_{l+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Pi_i = \frac{i\bar{\omega}_1 + i\bar{\omega}_2 + \ldots + i\bar{\omega}_{l-i+1} - (l-i)\bar{\omega}_{l-i} - \ldots - (l-i)\bar{\omega}_{l+1}}{l+1}$$
$$= -\bar{\omega}_{l-i} - \bar{\omega}_{l-i+1} - \ldots - \bar{\omega}_{l+1},$$

$$\Pi_l = \frac{l\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 - \ldots - \bar{\omega}_{l+1}}{l+1} = \bar{\omega}_1.$$

Tout autre poids dominant

$$\varpi = m_1\bar{\omega}_1 + m_2\bar{\omega}_2 + \ldots + m_{l+1}\bar{\omega}_{l+1}$$

est de la forme

$$\varpi = p_1\Pi_1 + p_2\Pi_2 + \ldots + p_l\Pi_l,$$

où les entiers *non négatifs* $p_1, p_2, \ldots, p_l$ sont donnés par les relations

$$p_1 = m_l - m_{l+1}, \qquad p_2 = m_{l-1} - m_l, \qquad \ldots, \qquad p_l = m_1 - m_2.$$

Les poids de chaque groupe g_i sont tous homologues entre eux.

Ils s'obtiennent en effectuant sur les indices des lettres $\overline{\omega}$ de Π_i une substitution quelconque.

Le groupe g_i, *supposé exister*, a donc C^i_{l+1} variables.

VI. — Poids fondamentaux du type B).

15. Ici les racines sont de la forme (¹)

$$\pm \omega_i, \qquad \pm \omega_i \pm \omega_j \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l).$$

Soit

$$\varpi = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \ldots + m_l \omega_l$$

un poids quelconque ; soient $S_i\varpi$, $S_{ij}\varpi$, $S_{ij'}\varpi$ les poids transformés de ϖ par les susbtitutions S correspondant aux racines ω_i, $\omega_i + \omega_j$, $\omega_i - \omega_j$. On a

$$S_i\varpi = \varpi - 2m_i\omega_i, \qquad S_{ij}\varpi = \varpi - (m_i + m_j)(\omega_i + \omega_j),$$
$$S_{ij'}\varpi = \varpi - (m_i - m_j)(\omega_i - \omega_j).$$

Il résulte de là que les m_i sont ou bien tous entiers, ou bien tous des fractions de dénominateur 2 et de numérateur impair.

Définissons le poids dominant comme dans le cas du type A). On voit que si ϖ est un poids dominant, tous les m_i sont positifs ou nuls :

$$m_1 \geqq m_2 \geqq m_3 \geqq \ldots \geqq m_l \geqq 0.$$

Ces inégalités sont nécessaires et suffisantes pour que le poids ϖ soit plus haut que tous ses homologues.

16. Parmi les poids dominants possibles, nous pouvons prendre les l suivants :

$$\Pi_1 = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_l}{2},$$
$$\Pi_2 = \omega_1,$$
$$\Pi_3 = \omega_1 + \omega_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Pi_l = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{l-1}.$$

Tout autre poids dominant est de la forme

$$\varpi = p_1\Pi_1 + p_2\Pi_2 + \ldots + p_l\Pi_l,$$

(¹) *C*, p. 79.

où les entiers non négatifs $p_1, p_2, \ldots, p_l$ sont donnés par les relations

$$p_1 = 2m_l, \quad p_2 = m_1 - m_2, \quad p_3 = m_2 - m_3, \quad \ldots, \quad p_l = m_{l-1} - m_l.$$

Les poids de g_1 sont de la forme $\frac{\pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \ldots \pm \omega_l}{2}$ et sont au nombre de 2^l; ils sont tous frontières.

Les poids de g_2 sont $\pm\omega_i$ et o; les $2l$ premiers sont frontières.

Les poids de g_3 sont $\pm\omega_i \pm \omega_j$ et ceux de g_2 : ceux qui n'appartiennent pas à g_2 sont frontières.

D'une manière générale les poids de g_α sont

$$\pm\omega_{i_1} \pm \omega_{i_2} \pm \ldots \pm \omega_{i_{\alpha-1}}$$

et les poids de $g_{\alpha-1}$. Les premiers sont frontières.

VII. — Poids fondamentaux du type C).

17. Ici les racines sont [1]

$$\pm 2\bar{\omega}_i, \qquad \pm\bar{\omega}_i \pm \bar{\omega}_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, l).$$

Soit

$$\varpi = m_1\bar{\omega}_1 + m_2\bar{\omega}_2 + \ldots + m_l\bar{\omega}_l.$$

Si S_{ii}, S_{ij}, $S_{ij'}$ sont les substitutions correspondant aux racines $2\omega_i$, $\omega_i + \omega_j$, $\omega_i - \omega_j$, on a

$$S_{ii}\varpi = \varpi - 2m_i\bar{\omega}_i, \qquad S_{ij}\varpi = \varpi - (m_i + m_j)(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j),$$
$$S_{ij'}\varpi = \varpi - (m_i - m_j)(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j).$$

Il résulte de là que les m_i sont entiers. Si l'on définit le poids dominant comme précédemment, on voit que, pour tout poids dominant, on a

$$m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_l \geqq 0.$$

Ces inégalités sont nécessaires et suffisantes.

18. Parmi les poids dominants possibles, on peut prendre les l

---

(1) *C*, p. 79.

suivants :

$$\Pi_1 = \omega_1,$$
$$\Pi_2 = \omega_1 + \omega_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Pi_l = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_l.$$

Tous poids dominant ϖ est de la forme

$$\omega = p_1 \Pi_1 + p_2 \Pi_2 + \ldots + p_l \Pi_l,$$

où les entiers non négatifs p_1, p_2, ..., p_l sont donnés par les formules

$$p_1 = m_1 - m_2, \qquad p_2 = m_2 - m_3, \qquad \ldots, \qquad p_{l-1} = m_{l-1} - m_l, \qquad p_l = m_l.$$

Les poids Π sont donc fondamentaux.

Les poids de g_1 sont $\pm\,\omega_i$, en nombre $2\,l$, tous frontières.

Les poids de g_2 sont $\pm\,\omega_i \pm \omega_j$ et o, tous frontières, sauf o.

Les poids de g_3 sont $\pm\,\omega_i \pm \omega_j \pm \omega_k$ et ceux de g_1, les premiers étant frontières, et ainsi de suite.

VIII. — Poids fondamentaux du type D).

19. Les racines sont ici (¹)

$$\pm\,\bar\omega_i \pm \bar\omega_j \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l).$$

Soit

$$\varpi = m_1 \bar\omega_1 + m_2 \bar\omega_2 = \ldots + m_l \bar\omega_l.$$

Si S_{ij} et $S_{ij'}$ sont les substitutions correspondant aux racines $\bar\omega_i + \bar\omega_j$ et $\bar\omega_i - \bar\omega_j$, on a

$$S_{ij}\varpi = \varpi - (m_i + m_j)(\bar\omega_i + \bar\omega_j), \qquad S_{ij'}\varpi = \varpi - (m_i - m_j)(\bar\omega_i - \bar\omega_j).$$

Il en résulte que les m_i sont tous entiers, ou tous des fractions de dénominateur 2 et de numérateur impair. Si l'on définit le poids dominant comme dans les cas précédents, on voit que, si $i < j$, on doit avoir

$$m_i \geqq m_j, \qquad m_i \geqq -\,m_j.$$

(¹) *C*, p. 79.

Les coefficients $m_1, \ldots, m_{l-1}$ sont donc positifs ou nuls, ne vont pas en croissant, et sont supérieurs ou égaux à m_l en valeur absolue

$$m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_{l-1} \geqq 0; \qquad m_{l-1} \geqq |m_l|.$$

Ces inégalités sont nécessaires et suffisantes.

20. On peut choisir pour poids fondamentaux les poids suivants :

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots + \overline{\omega}_{l-1} - \overline{\omega}_l}{2},\\
\Pi_2 &= \frac{\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots + \overline{\omega}_{l-1} + \overline{\omega}_l}{2},\\
\Pi_3 &= \overline{\omega}_1,\\
\Pi_4 &= \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Pi_l &= \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots + \overline{\omega}_{l-2}.
\end{aligned}$$

Tout poids dominant ϖ est de la forme

$$\varpi = p_1 \Pi_1 + p_2 \Pi_2 + \ldots + p_l \Pi_l,$$

où les nombres entiers non négatifs $p_1, \ldots, p_l$ sont donnés par

$$p_1 = m_{l-1} - m_l, \qquad p_2 = m_{l-1} + m_l, \qquad p_3 = m_1 - m_2,$$
$$p_4 = m_2 - m_3, \qquad \ldots, \qquad p_l = m_{l-2} - m_{l-1}.$$

Les poids de g_1 et g_2 sont tous frontières et en nombre 2^{l-1}. Ceux de g_3 sont de la forme $\pm\overline{\omega}_i$, tous frontières. Ceux de g_4 sont $\pm\overline{\omega}_i \pm \overline{\omega}_j$ et o, tous frontières, sauf o. Ceux de g_5 sont $\pm\overline{\omega}_i \pm \overline{\omega}_j \pm \overline{\omega}_k$ et ceux de g_3, et ainsi de suite.

IX. — Poids fondamentaux du type E) ($l = 6$).

21. Les racines sont ici de la forme [1]

$$\omega_{ij} = \overline{\omega}_i - \overline{\omega}_j, \qquad \omega_{ijk} = \overline{\omega}_i + \overline{\omega}_j + \overline{\omega}_k, \qquad \omega'_{ijk} = -(\overline{\omega}_i + \overline{\omega}_j + \overline{\omega}_k)$$
$$(i, j, k = 1, 2, \ldots, 6),$$
$$\omega_{000} = 3\overline{\omega}_0 = -(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots + \overline{\omega}_6), \qquad \omega'_{000} = -3\overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots + \overline{\omega}_6.$$

---

[1] C, p. 80 et 142.

Si l'on a un poids ϖ de la forme

$$\varpi = m_1\overline{\omega}_1 + m_2\overline{\omega}_2 + \ldots + m_6\overline{\omega}_6,$$

et si l'on désigne par S_{ij}, S_{ijk}, S_{000} les substitutions correspondant aux racines ω_{ij}, ω_{ijk}, ω_{000}, on a

$$\begin{aligned}
S_{ij}\,\varpi &= \varpi - (m_i - m_j)(\overline{\omega}_i - \overline{\omega}_j),\\
S_{ijk}\varpi &= \varpi + \left(\frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_i - m_j - m_k\right)(\overline{\omega}_i + \overline{\omega}_j + \overline{\omega}_k),\\
S_{000}\varpi &= \varpi - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots + \overline{\omega}_6).
\end{aligned}$$

Il résulte de là que les m_i diffèrent entre eux de nombres entiers, que leur somme est un multiple de 3 et que la somme de trois quelconques d'entre eux est un multiple de 3. Ce sont donc en particulier, ou des nombres entiers, ou des fractions de dénominateur 3 et de numérateur congru à 1 (mod 3) ou des fractions de dénominateur 3 et de numérateur congru à 2 (mod 3).

Si l'on définit la hauteur relative de deux poids comme précédemment, on voit que pour tout poids dominant, les m_i ne vont pas en croissant

$$m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_6.$$

De plus l'entier $\frac{1}{3}\sum m_\alpha - m_4 - m_5 - m_6$ doit être négatif ou nul; on a par suite

$$m_1 + m_2 + m_3 \leqq 2(m_4 + m_5 + m_6).$$

22. Réciproquement, supposons qu'on ait

$$(1)\qquad \begin{cases} m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_6,\\ m_4 + m_5 + m_6 \geqq \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha; \end{cases}$$

on peut démontrer sans difficulté que de tous les poids homologues de ϖ, aucun n'est plus haut que lui. On forme d'abord facilement tous les poids homologues de ϖ. Abstraction faite de leur ordre, les coefficients de ces poids homologues rentrent dans les catégories suivantes :

1°
$$\left\{\begin{array}{c} m_1 - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha, \quad m_2 - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha, \quad m_3 - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha, \quad m_4 - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha, \\ m_5 - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha, \quad m_6 - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha; \end{array}\right.$$

2°
$$\left\{\begin{array}{l} m_i, \quad m_j, \quad m_k, \quad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_s - m_t, \\ \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_t - m_r, \quad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_r - m_s; \end{array}\right.$$

3°
$$\left\{\begin{array}{c} m_i - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha, \quad m_j - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha, \quad m_k - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha, \quad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_s - m_t, \\ \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_t - m_r, \quad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_r - m_s; \end{array}\right.$$

4°
$$\left\{\begin{array}{c} m_i, \quad m_i - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha, \quad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_j - m_k, \quad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_j - m_r, \\ \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_j - m_s, \quad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_j - m_t \ (^1). \end{array}\right.$$

D'après cela, si l'un de ces poids était au moins aussi haut que ϖ, on aurait l'une des inégalités

$$m_1 - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha \geqq m_1, \qquad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_5 - m_6 \geqq m_1.$$

La première inégalité donnerait

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 \leqq 0;$$

en tenant compte de

$$m_1 + m_2 + m_3 - 2(m_4 + m_5 + m_6) \leqq 0,$$

on en déduirait

$$m_1 + m_2 + m_3 - (m_4 + m_5 + m_6) \leqq 0,$$

ce qui exige

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = 0.$$

La deuxième inégalité conduirait aux inégalités

$$\frac{1}{3}\Sigma m_\alpha \leqq m_4 + m_5 + m_6 \leqq m_1 + m_5 + m_6 \leqq \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha,$$

---

(1) On a désigné par i, j, k, r, s, t, les six indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, rangés dans un ordre quelconque.

d'où l'on conclut

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2(m_5 + m_6).$$

On pourrait donc poser

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2a, \qquad m_5 = b, \qquad m_6 = a - b \qquad \left(2a \geqq b \geqq \frac{a}{2} \geqq 0\right).$$

On vérifie directement alors que le poids ϖ est au moins aussi haut que tous ses homologues.

Les poids *dominants* sont donc complètement caractérisés par les inégalités (1).

23. On trouve facilement les poids dominants suivants, rangés par ordre de hauteur :

$$\Pi_1 = \frac{2}{3}\bar\omega_1 + \frac{2}{3}\bar\omega_2 + \frac{2}{3}\bar\omega_3 + \frac{2}{3}\bar\omega_4 + \frac{2}{3}\bar\omega_5 - \frac{1}{3}\bar\omega_6 = -\bar\omega_6 - 2\bar\omega_0,$$
$$\Pi_2 = \bar\omega_1 + \bar\omega_2 + \bar\omega_3 + \bar\omega_4 + \bar\omega_5 + \bar\omega_6 = -3\bar\omega_0,$$
$$\Pi_3 = \frac{4}{3}\bar\omega_1 + \frac{1}{3}\bar\omega_2 + \frac{1}{3}\bar\omega_3 + \frac{1}{3}\bar\omega_4 + \frac{1}{3}\bar\omega_5 + \frac{1}{3}\bar\omega_6 = \bar\omega_1 - \bar\omega_0,$$
$$\Pi_4 = \frac{4}{3}\bar\omega_1 + \frac{4}{3}\bar\omega_2 + \frac{4}{3}\bar\omega_3 + \frac{4}{3}\bar\omega_4 + \frac{1}{3}\bar\omega_5 + \frac{1}{3}\bar\omega_6 = -\bar\omega_5 - \bar\omega_6 - 4\bar\omega_0,$$
$$\Pi_5 = \frac{5}{3}\bar\omega_1 + \frac{5}{3}\bar\omega_2 + \frac{2}{3}\bar\omega_3 + \frac{2}{3}\bar\omega_4 + \frac{2}{3}\bar\omega_5 + \frac{2}{3}\bar\omega_6 = \bar\omega_1 + \bar\omega_2 - 2\bar\omega_0,$$
$$\Pi_6 = 2\bar\omega_1 + 2\bar\omega_2 + 2\bar\omega_3 + \bar\omega_4 + \bar\omega_5 + \bar\omega_6 = \bar\omega_1 + \bar\omega_2 + \bar\omega_3 - 3\bar\omega_0.$$

Ces poids sont les six poids fondamentaux, car tout poids dominant ϖ est de la forme

$$\varpi = p_1\Pi_1 + p_2\Pi_2 + \ldots + p_6\Pi_6,$$

avec

$$p_1 = m_5 - m_6,$$
$$p_2 = \frac{2}{3}(m_4 + m_5 + m_6) - \frac{1}{3}(m_1 + m_2 + m_3),$$
$$p_3 = m_1 - m_2,$$
$$p_4 = m_4 - m_5,$$
$$p_5 = m_2 - m_3,$$
$$p_6 = m_3 - m_4.$$

24. Les poids de g_1 sont

$$-\bar\omega_i + \bar\omega_0, \quad -\bar\omega_i - 2\bar\omega_0, \quad \bar\omega_i + \bar\omega_j + \bar\omega_0,$$

tous frontières.

Les poids de g_2 sont

$$\overline{\omega}_i-\overline{\omega}_j,\quad \pm(\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_j+\overline{\omega}_k),\quad \pm 3\overline{\omega}_0,\quad ,$$

tous frontières, sauf o.

Les poids de g_3 sont

$$\overline{\omega}_i-\overline{\omega}_0,\quad \overline{\omega}_i+2\overline{\omega}_0,\quad -\overline{\omega}_i-\overline{\omega}_j-\overline{\omega}_0,$$

tous frontières.

Les poids de g_4 sont ceux de g_3 et en outre les poids frontières

$$-2\overline{\omega}_i-\overline{\omega}_0,\quad -\overline{\omega}_i-\overline{\omega}_j+2\overline{\omega}_0,\quad -\overline{\omega}_i-\overline{\omega}_j-4\overline{\omega}_0,\quad -\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_j+\overline{\omega}_k-\overline{\omega}_0,$$
$$-\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_j+\overline{\omega}_k+2\overline{\omega}_0,\quad 2\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_j+\overline{\omega}_k+2\overline{\omega}_0.$$

Les poids de g_5 sont ceux de g_1 et en outre les points frontières égaux et de signes contraires à ceux de g_4.

Enfin les poids de g_6 sont ceux de g_2, puis les poids frontières de $g_1 g_3$

$$\pm(2\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_j),\quad \overline{\omega}_i+\overline{\omega}_j-\overline{\omega}_k-\overline{\omega}_l,$$
$$\pm(\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_j+\overline{\omega}_k+\overline{\omega}_l-\overline{\omega}_m),\quad \pm(\overline{\omega}_i-\overline{\omega}_j-3\overline{\omega}_0),$$

enfin les poids frontières de g_6

$$\pm(\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_j-2\overline{\omega}_k),\quad \pm(2\overline{\omega}_i+2\overline{\omega}_j+\overline{\omega}_k+\overline{\omega}_l),$$
$$\pm(2\overline{\omega}_i+2\overline{\omega}_j+\overline{\omega}_k-\overline{\omega}_l),\quad \pm(\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_j+\overline{\omega}_k-3\overline{\omega}_0).$$

X. — Poids fondamentaux du type E) ($l=7$).

25. Dans ce cas les racines sont de la forme (¹)

$$\omega_{ij}=\overline{\omega}_i-\overline{\omega}_j,\quad \omega_{ijk}=\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_j+\overline{\omega}_k,\quad \omega'_{ijk}=-(\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_j+\overline{\omega}_k),$$
$$\omega_{00i}=2\overline{\omega}_0+\overline{\omega}_i,\quad \omega'_{00i}=-(2\overline{\omega}_0+\overline{\omega}_i)$$
$$(i,j,k=1,2,\ldots,7),$$

où les 8 quantités $\overline{\omega}_0, \overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_7$ sont liées par la relation

$$2\overline{\omega}_0+\overline{\omega}_1+\ldots+\overline{\omega}_7=0.$$

(¹) *C*, p. 80 et 143.

Tout poids ϖ peut se mettre sous la forme

$$\varpi = m_1\overline{\omega}_1 + m_2\overline{\omega}_2 + \ldots + m_7\overline{\omega}_7.$$

On a

$$\begin{aligned}
S_{ij}\,\varpi &= \varpi - (m_i - m_j)(\overline{\omega}_i - \overline{\omega}_j),\\
S_{ijk}\varpi &= \varpi + \left(\frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_i - m_j - m_k\right)(\overline{\omega}_i + \overline{\omega}_j + \overline{\omega}_k),\\
S_{00i}\varpi &= \varpi + \left(\frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_i\right)(2\overline{\omega}_0 + \overline{\omega}_i).
\end{aligned}$$

Il résulte de là que les quantités $m_i - m_j$, $m_i + m_j$ sont entières. Donc ou bien les m_i sont tous entiers, leur somme étant un multiple de 3; ou bien les m_i sont tous des fractions de dénominateur 2 et de numérateur impair, la somme des numérateurs étant un multiple de 3.

Définissons le poids dominant comme précédemment. On aura d'abord

$$(1) \qquad m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_7,$$

puis

$$(2) \qquad m_1 \leqq \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha \leqq m_5 + m_6 + m_7;$$

on tire d'ailleurs de ces inégalités la conclusion que m_6 est positif.

26. On trouve sans difficulté les différents poids homologues d'un poids donné ϖ. Abstraction faite de l'ordre, leurs coefficients sont donnés par le Tableau suivant :

$$1^\circ \left\{\begin{array}{l} m_i,\quad m_j,\quad m_k,\quad m_l,\quad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_s - m_t,\quad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_t - m_r,\\ \qquad\qquad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_r - m_s; \end{array}\right.$$

$$2^\circ \left\{\begin{array}{l} m_i,\quad m_i + m_j - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha,\quad m_i + m_k - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha,\quad m_i + m_l - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha,\\ m_i + m_r - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha,\quad m_i + m_s - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha,\quad m_i + m_t - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha; \end{array}\right.$$

$$3^\circ \left\{\begin{array}{l} m_i,\quad m_j,\quad m_i + m_j - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha,\quad \frac{1}{2}\Sigma m_\alpha - m_k - m_l,\\ \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_k - m_r,\quad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_k - m_s,\quad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_k - m_t; \end{array}\right.$$

$$4^\circ \left\{\begin{array}{l} m_i,\quad m_i + m_j - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha,\quad m_i + m_k - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha,\quad m_i + m_l - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha,\\ \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_s - m_t,\quad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_t - m_r,\quad \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_r - m_s, \end{array}\right.$$

auquel il faut ajouter le Tableau formé des mêmes coefficients changés de signes.

Supposons alors que les coefficients m_i du poids ϖ satisfassent aux inégalités (1). Il est facile de voir qu'aucun poids homologue de ϖ n'est plus haut que ϖ. S'il en était ainsi, en effet, on aurait une des inégalités

$$-m_7 \geqq m_1,$$
$$\frac{1}{3}\Sigma m_\alpha - m_i - m_j \geqq m_k,$$
$$m_1 + m_2 - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha \geqq m_3.$$

La première inégalité entraînerait, d'après (1), les inégalités

$$m_6 + m_7 \leqq m_1 + m_7 \leqq 0, \qquad m_1 \leqq \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha \leqq m_5 + m_6 + m_7 \leqq m_5;$$

on en déduirait

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5, \qquad m_6 + m_7 = 0,$$
$$3m_1 = 5m_1 = 0, \qquad m_6 = m_7 = 0.$$

La deuxième inégalité donnerait

$$m_i + m_j + m_k \leqq \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha \leqq m_5 + m_6 + m_7 \leqq m_i + m_j + m_k,$$

d'où

$$\frac{1}{3}\Sigma m_\alpha = m_i + m_j + m_k,$$

et l'inégalité se changerait en égalité.

La dernière inégalité, enfin, entraîne les valeurs

$$m_1 = m_2 = 2a, \qquad m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = a,$$

et l'on vérifie directement, dans ce cas, que ϖ est au moins aussi haut que tous les poids homologues.

Les inégalités (1) et (2) sont donc nécessaires et suffisantes pour que le poids ϖ soit un poids dominant.

27. On trouve facilement les poids dominants suivants, rangés

par ordre de hauteur :

$$\Pi_1 = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3 + \overline{\omega}_4 + \overline{\omega}_5 + \overline{\omega}_6 = -\overline{\omega}_7 - 2\overline{\omega}_0;$$

$$\Pi_2 = \frac{3}{2}\overline{\omega}_1 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_3 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_4 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_5 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_6 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_7 = \overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_0;$$

$$\Pi_3 = \frac{3}{2}\overline{\omega}_1 + \frac{3}{2}\overline{\omega}_2 + \frac{3}{2}\overline{\omega}_3 + \frac{3}{2}\overline{\omega}_4 + \frac{3}{2}\overline{\omega}_5 + \frac{3}{2}\overline{\omega}_6 + \frac{3}{2}\overline{\omega}_7 = -3\overline{\omega}_0;$$

$$\Pi_4 = 2\overline{\omega}_1 + 2\overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3 + \overline{\omega}_4 + \overline{\omega}_5 + \overline{\omega}_6 + \overline{\omega}_7 = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 - 2\overline{\omega}_0;$$

$$\Pi_5 = 2\overline{\omega}_1 + 2\overline{\omega}_2 + 2\overline{\omega}_3 + 2\overline{\omega}_4 + 2\overline{\omega}_5 + \overline{\omega}_6 + \overline{\omega}_7 = -\overline{\omega}_6 - \overline{\omega}_7 - 4\overline{\omega}_0;$$

$$\Pi_6 = \frac{5}{2}\overline{\omega}_1 + \frac{5}{2}\overline{\omega}_2 + \frac{5}{2}\overline{\omega}_3 + \frac{3}{2}\overline{\omega}_4 + \frac{3}{2}\overline{\omega}_5 + \frac{3}{2}\overline{\omega}_6 + \frac{3}{2}\overline{\omega}_7 = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3 - 3\overline{\omega}_0;$$

$$\Pi_7 = 3\overline{\omega}_1 + 3\overline{\omega}_2 + 3\overline{\omega}_3 + 3\overline{\omega}_4 + 2\overline{\omega}_5 + 2\overline{\omega}_6 + 2\overline{\omega}_7 = 2\overline{\omega}_5 + 2\overline{\omega}_6 + 2\overline{\omega}_7 - 2\overline{\omega}_0.$$

Ce sont les poids fondamentaux, car tout poids dominant ϖ est de la forme

$$\varpi = p_1\Pi_1 + p_2\Pi_2 + \ldots + p_7\Pi_7,$$

avec les coefficients

$$\begin{aligned}
p_1 &= m_6 - m_7,\\
p_2 &= m_1 - m_2,\\
p_3 &= m_5 + m_6 + m_7 - \frac{1}{3}\Sigma m_\alpha,\\
p_4 &= m_2 - m_3,\\
p_5 &= m_5 - m_6,\\
p_6 &= m_3 - m_4,\\
p_7 &= m_4 - m_5.
\end{aligned}$$

28. Les poids du groupe g_1 sont o et les poids frontières homologues de Π_1

$$\overline{\omega}_i - \overline{\omega}_j, \quad \pm(\overline{\omega}_i + \overline{\omega}_j + \overline{\omega}_k), \quad \pm(2\overline{\omega}_0 + \overline{\omega}_i).$$

Les poids de g_2 sont les poids frontières homologues de Π_2 :

$$\pm(\overline{\omega}_i - \overline{\omega}_0), \quad \pm(\overline{\omega}_0 + \overline{\omega}_i + \overline{\omega}_j).$$

Les poids de g_3 sont les poids homologues de Π_2 et les poids frontières homologues de Π_3.

Les poids de g_4 sont o, les poids homologues de Π_1 et les poids frontières homologues de Π_4.

Les poids de g_5 sont o, les poids homologues de Π_1 e de Π_4, et les poids frontières homologues de Π_5.

Les poids de g_6 sont les poids homologues de Π_2, de Π_3 et de $\Pi_1+\Pi_2$, et les poids frontières homologues de Π_6.

Les poids de g_7 sont o, les poids homologues de Π_1, Π_4, Π_5, $2\Pi_1$, $\Pi_2+\Pi_3$, $\Pi_1+\Pi_4$, et les poids frontières homologues de Π_7.

XI. — Poids fondamentaux du type E) ($l=8$).

29. Les racines sont ici [1]

$$\omega_{ij}=\bar{\omega}_i-\bar{\omega}_j,\qquad \omega_{ijk}=\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_j+\bar{\omega}_k,\qquad \omega'_{ijk}=-(\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_j+\bar{\omega}_k)$$
$$(i,j,k=1,2,\ldots,9)$$

avec la relation

$$\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2+\ldots+\bar{\omega}_9=0.$$

Tout poids ϖ peut se mettre sous la forme

$$\varpi=m_1\bar{\omega}_1+m_2\bar{\omega}_2+\ldots+m_9\bar{\omega}_9,$$

les coefficients m_i étant assujettis à la relation

$$m_1+m_2+\ldots+m_9=0.$$

On a ici

$$S_{ij}\,\varpi=\varpi-(m_i-m_j)(\bar{\omega}_i-\bar{\omega}_j),$$
$$S_{ijk}\varpi=\varpi-(m_i+m_j+m_k)(\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_j+\bar{\omega}_k)+\frac{1}{3}(m_i+m_j+m_k)\Sigma\bar{\omega}_\alpha.$$

Les coefficients m_i ont des différences entières; ce sont des fractions ayant pour dénominateur 3 et des numérateurs congrus entre eux (mod 3).

Définissons le poids dominant comme dans le cas du type A). On devra avoir d'abord

$$m_1\geqq m_2\geqq\ldots\geqq m_9;$$

on aura ensuite

$$m_1+m_8+m_9\geqq 0\geqq m_2+m_3+m_4.$$

On peut démontrer, comme dans les deux cas précédents, que les inégalités précédentes suffisent pour que le poids ϖ soit poids dominant.

30. Considérons les huit poids dominants suivants, rangés par

---

(1) *C*, p. 80.

ordre de hauteur :

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_9\\
\Pi_2 &= \frac{5}{3}\bar{\omega}_1 + \frac{2}{3}\bar{\omega}_2 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_3 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_4 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_5 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_6 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_7 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_8 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_9 = 2\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2,\\
\Pi_3 &= 2\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_8 - \bar{\omega}_9,\\
\Pi_4 &= \frac{8}{3}\bar{\omega}_1 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_2 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_3 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_4 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_5 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_6 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_7 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_8 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_9 = 3\bar{\omega}_1,\\
\Pi_5 &= 3\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_7 - \bar{\omega}_8 - \bar{\omega}_9,\\
\Pi_6 &= \frac{10}{3}\bar{\omega}_1 + \frac{1}{3}\bar{\omega}_2 + \frac{1}{3}\bar{\omega}_3 - \frac{2}{3}\bar{\omega}_4 - \frac{2}{3}\bar{\omega}_5 - \frac{2}{3}\bar{\omega}_6 - \frac{2}{3}\bar{\omega}_7 - \frac{2}{3}\bar{\omega}_8 - \frac{2}{3}\bar{\omega}_9 = 4\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3,\\
\Pi_7 &= 4\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_6 - \bar{\omega}_7 - \bar{\omega}_8 - \bar{\omega}_9,\\
\Pi_8 &= 5\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_5 - \bar{\omega}_6 - \bar{\omega}_7 - \bar{\omega}_8 - \bar{\omega}_9.
\end{aligned}
$$

Ce sont les poids fondamentaux, car tout autre poids dominant ϖ peut se mettre sous la forme

$$\varpi = p_1\Pi_1 + p_2\Pi_2 + \ldots + p_8\Pi_8$$

avec les coefficients entiers non négatifs

$$
\begin{aligned}
p_1 &= m_8 - m_9,\\
p_2 &= m_2 - m_3,\\
p_3 &= m_7 - m_8,\\
p_4 &= - m_2 - m_3 - m_4,\\
p_5 &= m_6 - m_7,\\
p_6 &= m_3 - m_4,\\
p_7 &= m_5 - m_6,\\
p_8 &= m_4 - m_5.
\end{aligned}
$$

31. Les poids du groupe g_1 sont o et les racines $\bar{\omega}_{ij}$, $\pm\bar{\omega}_{ijk}$.

Les poids du groupe g_2 sont o et les poids homologues de Π_1 et Π_2.

Les poids du groupe g_3 sont o et les poids homologues de Π_1, Π_2 et Π_3.

Les poids du groupe g_4 sont o et les poids homologues de Π_1, Π_2, Π_3 et Π_4.

Les poids du groupe g_5 sont o et les poids homologues de Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, $2\Pi_1$, $\Pi_1+\Pi_2$ et Π_5.

Les poids du groupe g_6 sont o et les poids homologues de Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, $2\Pi_1$, $\Pi_1+\Pi_2$, Π_5 et Π_6.

Les poids du groupe g_7 sont o et les poids homologues de Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, $2\Pi_1$, $\Pi_1+\Pi_2$, Π_5, $\Pi_1+\Pi_3$, Π_6, $2\Pi_2$, $\Pi_1+\Pi_4$, $\Pi_2+\Pi_3$ et Π_7.

Les poids du groupe g_8 sont o et les poids homologues de Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, $2\Pi_1$, $\Pi_1+\Pi_2$, Π_5, $\Pi_1+\Pi_3$, $3\Pi_1$, Π_6, $2\Pi_2$, $\Pi_1+\Pi_4$, $\Pi_2+\Pi_3$, $2\Pi_1+\Pi_2$, Π_7, $\Pi_1+\Pi_5$, $2\Pi_3$, $\Pi_2+\Pi_4$, $\Pi_1+\Pi_6$, $\Pi_3+\Pi_4$, $\Pi_2+\Pi_5$ et Π_8.

XII. — Poids fondamentaux du type F).

32. Ici les racines sont (1)

$$\pm\omega_i, \qquad \pm\omega_i\pm\omega_j, \qquad \frac{\pm\omega_1\pm\omega_2\pm\omega_3\pm\omega_4}{2} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Le rang du groupe est 4 et son ordre est 52.

Tout poids ϖ est de la forme

$$\varpi = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + m_4\omega_4.$$

Les substitutions $S\varpi$ correspondant aux racines $\pm\omega_i$, $\pm\omega_i\pm\omega_j$, $\dfrac{\pm\omega_1\pm\omega_2\pm\omega_3\pm\omega_4}{2}$ sont respectivement

$$S\varpi = \varpi - 2m_i\omega_i,$$
$$S\varpi = \varpi - (\pm m_i \pm m_j)(\pm\omega_i\pm\omega_j),$$
$$S\varpi = \varpi - (\pm m_1 \pm m_2 \pm m_3 \pm m_4)\frac{\pm\omega_1\pm\omega_2\pm\omega_3\pm\omega_4}{2}.$$

Il résulte de là que les m_i sont ou tous des entiers ou tous des fractions de dénominateur 2 et de numérateur impair.

Convenons de dire que le poids ϖ est plus haut que le poids ϖ' si la première des différences

$$m_1 - m'_1, \quad m_2 - m'_2, \quad m_3 - m'_3, \quad m_4 - m'_4$$

qui ne s'annule pas est positive. Les coefficients m_i de tout poids dominant sont alors positifs ou nuls et rangés par ordre de grandeur décroissante :

$$m_1 \geqq m_2 \geqq m_3 \geqq m_4 \geqq 0.$$

(1) C, p. 80.

De plus on doit avoir

$$m_1 \geqq m_2 + m_3 + m_4.$$

Réciproquement, si ces conditions sont réalisées, tous les poids qu'on déduit de ϖ par des substitutions S répétées ne sont pas plus hauts que ϖ.

33. On trouve facilement les quatre poids dominants suivants rangés par ordre de hauteur :

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \omega_1, \\
\Pi_2 &= \omega_1 + \omega_2, \\
\Pi_3 &= \frac{3\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4}{2}, \\
\Pi_4 &= 2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3.
\end{aligned}$$

Ce sont les poids fondamentaux, car tout poids dominant est de la forme

$$\varpi = p_1 \Pi_1 + p_2 \Pi_2 + p_3 \Pi_3 + p_4 \Pi_4,$$

où les coefficients non négatifs p_1, p_2, p_3, p_4 ont les valeurs

$$\begin{aligned}
p_1 &= m_1 - m_2 - m_3 - m_4, \\
p_2 &= m_2 - m_3, \\
p_3 &= 2m_4, \\
p_4 &= m_3 - m_4.
\end{aligned}$$

Les poids du groupe g_1 sont o et les poids frontières homologues de ω_1.

Les poids du groupe g_2 sont o, les poids frontières de g_1 homologues de ω_1 et les poids frontières homologues de $\omega_1 + \omega_2$.

Les poids du groupe g_3 sont o, les poids frontières de g_1 homologues de ω_1, ceux de g_2 homologues de $\omega_1 + \omega_2$, enfin les poids frontières homologues de $\frac{3\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4}{2}$.

Les poids du groupe g_4 sont o, les poids frontières de g_1 homologues de ω_1, ceux de g_2 homologues de $\omega_1 + \omega_2$, ceux de g_3 homologues de $\frac{3\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4}{2}$, ceux de g_1^2 homologues de $2\omega_1$, ceux de $g_1 g_2$ homologues de $2\omega_1 + \omega_2$, enfin les poids frontières homologues de $2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$.

XIII. — Poids fondamentaux du type G).

34. Ici les racines sont de la forme [1]

$$\pm\omega_i, \qquad \omega_{ij}=\omega_i-\omega_j \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

où les trois racines ω_1, ω_2, ω_3 sont liées par la relation

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3=0.$$

Le rang du groupe est 2 et son ordre est 14.

Tout poids ϖ est de la forme

$$\varpi = m_1\omega_1+m_2\omega_2+m_3\omega_3,$$

où l'on peut supposer les coefficients liés par la relation

$$m_1+m_2+m_3=0.$$

On a ici

$$\begin{aligned} S_1\,\varpi &= \varpi-3m_1\omega_1 \\ &= \varpi-2m_1\omega_1+m_1\omega_2+m_1\omega_3=-m_1\omega_1-m_3\omega_2-m_2\omega_3, \\ S_{12}\varpi &= \varpi-(m_1-m_2)(\omega_1-\omega_2)=m_2\omega_1+m_1\omega_2+m_3\omega_3. \end{aligned}$$

Il résulte de là que les coefficients m_i sont des fractions de dénominateur 3 et dont tous les numérateurs sont congrus (mod 3).

Définissons la hauteur relative de deux poids comme dans les cas précédents. Si ϖ est un poids dominant, on aura

$$m_1\geqq m_2\geqq m_3,$$

puis

$$m_1\geqq -m_3 \qquad \text{ou} \qquad m_2\leqq 0.$$

Réciproquement, si l'on a

$$m_1\geqq m_2\geqq m_3, \qquad m_2\leqq 0,$$

les poids homologues de ϖ ne sont pas plus hauts que ϖ, et ϖ est un poids dominant.

35. On trouve facilement les deux poids dominants suivants

---

[1] *C*, p. 80 et 81.

rangés par ordre de hauteur :

$$\Pi_1 = \frac{2}{3}\omega_1 - \frac{1}{3}\omega_2 - \frac{1}{3}\omega_3 = \omega_1,$$

$$\Pi_2 = \omega_1 - \omega_3.$$

Ce sont les poids fondamentaux, car tout poids dominant est de la forme

$$\varpi = p_1\Pi_1 + p_2\Pi_2,$$

avec

$$p_1 = -3m_3,$$

$$p_2 = m_2 - m_3.$$

Les poids du groupe g_1 sont o et les poids frontières $\pm\omega_i$ homologues de ω_1.

Les poids du groupe g_2 sont o, les poids frontières de g_1 et les poids frontières $\omega_i - \omega_j$.

XIV. — Groupes linéaires fondamentaux du type A).

36. Il existe d'abord un groupe linéaire correspondant au poids fondamental Π_1 ; soit x_i une variable correspondant au poids $-\overline{\omega_i}$. Il suffit de prendre [1]

$$X_{ij} = x_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, l+1),$$

et par suite

$$X_{ii} - X_{jj} = x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Le groupe g_1 est donc le groupe linéaire et homogène spécial à $l+1$ variables.

On forme facilement les autres groupes fondamentaux. *Le groupe g_2 est en effet celui qui indique comment le groupe g_1 transforme les C_{l+1}^2 formes bilinéaires alternées $[x_i x_j]$ (coordonnées plückériennes de la droite), le groupe g_3, celui qui indique comment g_1 transforme les C_{l+1}^3 formes trilinéaires $[x_i x_j x_k]$ (coordonnées plückériennes d'une multiplicité plane à deux dimensions), et ainsi de suite.*

---

[1] *C*, p. 140.

Par suite, *tout groupe linéaire du type* (A) *qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane indique comment* g_1 *transforme entre elles l'expression*

$$x_1^{p_1}[x_1 x_2]^{p_2}[x_1 x_2 x_3]^{p_3}\ldots[x_1 x_2 \ldots x_l]^{p_l}$$

et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1. Toutes ces expressions sont des combinaisons linéaires d'expressions de la forme

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\ldots x_{l+1}^{\alpha_{l+1}}[x_1 x_2]^{\alpha_{12}}\ldots[x_l x_{l+1}]^{\alpha_{l,l+1}}\ldots[x_1 x_2\ldots x_l]^{\alpha_{12\ldots l}}\ldots,$$

où les exposants α_i, α_{ij}, etc., sont liés par les relations

$$\Sigma\alpha_i = p_1, \qquad \Sigma\alpha_{ij} = p_2, \quad \Sigma\alpha_{ijk} = p_3, \qquad \ldots.$$

Par exemple, si l'on prend $p_1 = 2$, $p_2 = p_3 = \ldots = p_l = 0$, on aura le groupe qui indique comment les expressions x_i^2, $x_i x_j$, sont transformées entre elles par le groupe linéaire de $l+1$ variables. C'est encore le groupe qui indique comment le groupe linéaire transforme les coefficients A_{ij} de la forme quadratique $\Sigma A_{ij} x_i x_j$.

XV. — Groupes fondamentaux du type B).

37. Le groupe g_1, s'il existe, est ici à 2^l variables, car le poids dominant

$$\Pi_1 = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_l}{2}$$

a pour homologues les poids $\dfrac{\pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \ldots \pm \omega_l}{2}$ et il ne peut y avoir dans le groupe g_1 que ces 2^l poids, tous frontières.

On obtient facilement un groupe admettant les poids précédents en considérant les variables $x_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_l}$, où les indices ε sont égaux à ± 1. Posons alors

$$X_i = \sum \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{i-1}\, x_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{i-1}\,\alpha_i\varepsilon_{i+1},\ldots\varepsilon_l}\frac{\partial f}{\partial x_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{i-1},-\alpha_i,\varepsilon_{i+1}\ldots\varepsilon_l}},$$

$$X_{ij} = \sum \varepsilon_{i+1}\ldots\varepsilon_{j-1}\, x_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{i-1}\alpha_i,\varepsilon_{i+1}\ldots\varepsilon_{j-1},\alpha_j,\varepsilon_{j+l}\ldots\varepsilon_l}\frac{\partial f}{\partial x_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{i-1},-\alpha_i,\varepsilon_{i+1}\ldots\varepsilon_{j-1}.-\alpha_j,\varepsilon_{j+1}\ldots\varepsilon_l}},$$

$$Y_i = \alpha_i \sum \varepsilon_i\, x_{\varepsilon_1\ldots.\varepsilon_l}\frac{\partial f}{\partial x_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_l}}$$

$$(i, j = \pm 1, \pm 2, \pm l;\ \alpha_i = +1 \quad \text{si} \quad i > 0;\ \alpha_i = -1 \quad \text{si} \quad i < 0).$$

Ces transformations engendrent un groupe simple du type B). C'est le groupe g_1.

Le groupe g_2 est bien connu : *c'est le groupe linéaire d'une forme quadratique* (1)

$$x_0^2 + x_1 x_{-1} + \ldots + x_l x_{-l},$$

les variables x_0, x_i, x_{-i} étant respectivement de poids 0, ω_i, $-\omega_i$.

Le groupe g_3 de poids dominant $\omega_1 + \omega_2$ est le groupe qui indique comment g_2 transforme les formes bilinéaires $[x_i x_k]$. Le groupe ainsi défini admet en effet les mêmes poids que le groupe g_3 ; d'autre part, il ne laisse invariante aucune multiplicité plane, car il n'y a qu'une variable de poids donné, exception faite pour le poids o auquel correspondent les l variables $[x_1 x_{-1}]$, $[x_2 x_{-2}]$, ..., $[x_l x_{-l}]$. Toute multiplicité plane invariante serait donc définie par des relations de la forme

$$a_1[x_1 x_{-1}] + a_2[x_2 x_{-2}] + \ldots + a_l[x_l x_{-l}] = 0;$$

mais l'échange de x_1 et x_{-1} n'altérant pas la forme quadratique $x_0^2 + \Sigma x_i x_{-i}$, de la relation écrite doit découler l'existence de 2^l relations obtenues en changeant d'une manière quelconque les signes des coefficients : or, cela est impossible. Le groupe g_3 est à C_{2l+1}^2 variables : c'est le groupe *adjoint*.

On démontre de même que *le groupe g_4 de poids dominant $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ est celui qui indique comment g_2 transforme les formes trilinéaires $[x_i x_j x_k]$* ; il est à C_{2l+1}^3 variables.

Enfin le groupe g_l indique comment g_2 transforme les formes $[x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{l-1}}]$; il est à C_{2l+1}^{l-1} variables.

38. Les groupes fondamentaux, à l'exception de g_1, sont ainsi tous engendrés simplement au moyen de g_2. Il y a d'ailleurs une relation simple entre les deux groupes g_1 et g_2. Considérons en effet le système de 2^l équations linéaires

$$\begin{aligned} &x_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l} x_0 + \varepsilon_1 x_{-\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n} x_{\mp 1} + \ldots \\ &\quad + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_i x_{\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_{i-1}, -\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \ldots, \varepsilon_n} x_{i \varepsilon_i} + \ldots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_l x_{\varepsilon_i \ldots \varepsilon_{l-1}, -\varepsilon_l} x_{l \varepsilon_l} = 0 \end{aligned}$$

avec les $2l$ paramètres x_0, $x_{\pm 1}$, ..., $x_{\pm l}$. Ces équations définissent

(1) *C*, p. 140.

une famille de multiplicités planes de l'espace à $2^l - 1$ dimensions. Le groupe g_1 échange entre elles ces multiplicités, et l'on a en particulier

$$X_i = \alpha_i \left(2x_0 \frac{\partial f}{\partial x_{-i}} - x_i \frac{\partial f}{\partial x_0} \right);$$

on obtient ainsi un groupe linéaire qui laisse invariante la forme quadratique

$$x_0^2 + x_1 x_{-1} + x_2 x_{-2} + \ldots + x_l x_{-l}$$

et qui n'est autre que le groupe g_2.

Réciproquement, le groupe g_1 peut être déduit du groupe g_2 comme étant le groupe qui indique comment g_2 transforme entre elles certaines multiplicités planes de l'espace à $2l$ dimensions : *ces multiplicités planes sont d'ailleurs contenues dans la quadrique*

$$x_0^2 + x_1 x_{-1} + \ldots + x_l x_{-l} = 0.$$

En définitive, *on peut engendrer tous les groupes fondamentaux au moyen du premier groupe g_1.*

39. On peut d'ailleurs indiquer une génération encore plus directe des groupes fondamentaux au moyen de g_1. Considérons, en effet, d'abord le groupe g_l. Ses poids frontières sont les homologues de $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{l-1}$. Considérons, d'autre part, le groupe qui indique comment g_1 transforme les différentes formes bilinéaires $[x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_l} x_{\eta_1 \ldots \eta_l}]$; il a les mêmes poids frontières que g_l; en particulier la variable $[x_{11\ldots 11} x_{11\ldots 11'}]$ a le poids frontière $\omega_1 + \ldots + \omega_{l-1}$. *Le groupe g_l s'obtient donc en appliquant à la quantité $[x_{11\ldots 11} x_{11\ldots 11'}]$ les différentes transformations de g_1 un nombre quelconque de fois : il indique comment g_1 transforme les différentes quantités ainsi obtenues.*

D'une manière générale, les poids frontières de $g_{l-\alpha}$ ($\alpha = 1, \ldots, l-1$) appartiennent, soit aux poids de g_1^2, soit aux poids de g_l. Cherchons à déterminer une combinaison linéaire des variables de g_1^2 (ou des variables de g_l) qui soit de poids $\omega_1 + \ldots + \omega_{l-\alpha-1}$, et telle que les différentes transformations du groupe g_1^2 (ou g_l) appliquées à cette combinaison linéaire de variables, ne donnent que des quantités dont le poids appartienne à $g_{l-\alpha}$; il suffira pour cela qu'il en soit ainsi des transformations $X_{l-\alpha}, \ldots, X_l$. S'il en est ainsi, la quantité considérée et celles qu'on en déduira seront des variables transformées par un groupe qui ne sera autre que $g_{l-\alpha}$.

On arrive ainsi au résultat suivant :

Si α est de la forme $4n+2$ ou $4n+3$, le groupe $g_{l-\alpha}$ est celui qui indique comment g_1 transforme linéairement entre elles la forme quadratique

$$\Sigma\, \varepsilon_{l-\alpha}\varepsilon_{l-\alpha+2}\ldots x_{11\ldots 1.\varepsilon_{l-\alpha}\varepsilon_{l-\alpha+1}\ldots\varepsilon_l}\, x_{11\ldots 1\varepsilon'_{l-\alpha}\ldots\varepsilon'_l}$$

et celles qu'on en déduit en lui appliquant les transformations de g_1.

Si α est de la forme $4n$ ou $4n+1$, le groupe $g_{l-\alpha}$ est celui qui indique comment g_1 transforme linéairement entre elles la forme bilinéaire alternée

$$\Sigma\, \varepsilon_{l-\alpha}\varepsilon_{l-\alpha+2}\ldots [x_{11\ldots 1\varepsilon_{l-\alpha}\varepsilon_{l-\alpha+1}\ldots\varepsilon_l}\, x_{11\ldots 1\varepsilon'_{l-\alpha}\varepsilon'_{l-\alpha+1}\ldots\varepsilon'_l}]$$

et celles qu'on en déduit en lui appliquant les transformations de g_1.

XVI. — Groupes fondamentaux du type C).

40. Ici nous avons le groupe fondamental g_1 en considérant [1] le groupe linéaire et homogène à $2l$ variables

$$x_{\mp 1}, \quad \ldots, \quad x_{\pm l}$$

qui laisse invariante la forme bilinéaire alternée

$$[x_1 x_{-1}] + [x_2 x_{-2}] + \ldots + [x_l x_{-l}].$$

Les variables $x_{\pm i}$ ont les poids $\pm\,\omega_i$.

On obtiendra le groupe g_2 en partant de la forme bilinéaire alternée $[x_1 x_2]$ de poids Π_2, et lui appliquant les transformations de g_1. Le groupe g_2 indique comment g_1 transforme linéairement entre elles les quantités ainsi obtenues. Chaque poids frontière correspond à une variable; il n'y a de doute que pour le poids o, qui correspondra à des variables, combinaisons linéaires des

---

(1) *C*, p. 141.

expressions $[x_1 x_{-1}]$, ..., $[x_l x_{-l}]$. Le nombre des variables de poids o sera ainsi au plus égal à $l - 1$, car l'expression

$$[x_1 x_{-1}] + \ldots + [x_l x_{-l}]$$

est invariante par le groupe g_1. Si alors

$$a_1[x_1 x_{-1}] + a_2[x_2 x_{-2}] + \ldots + a_l[x_l x_{-l}]$$

est une de ces variables, les a_i ne sont pas tous égaux, par exemple $a_1 \neq a_2$; par raison de symétrie, la quantité

$$a_2[x_1 x_{-1}] + a_1[x_2 x_{-2}] + \ldots + a_l[x_l x_{-l}]$$

est encore une de ces variables et par suite aussi la différence

$$[x_1 x_{-1}] - [x_2 x_{-2}]$$

et les différences homologues

$$[x_i x_{-i}] - [x_j x_{-j}].$$

Donc il y a $l - 1$ variables de poids o, et *le groupe g_2 est un groupe à $C_{2l}^2 - 1 = l(2l - 1) - 1$ variables.*

On obtiendra d'une manière analogue les autres groupes fondamentaux. *Le groupe g_α est celui qui indique comment g_1 transforme linéairement entre elles la forme alternée*

$$[x_1 x_2 \ldots x_\alpha]$$

et celles qu'on en déduit par les transformations de g_1.

Le nombre des variables de g_α dont le poids est poids frontière de $g_{\alpha-2}$ est égal à $l - 1$; le nombre de celles dont le poids est poids frontière de $g_{\alpha-4}$ est $C_l^2 - 1$; d'une manière générale il y a $C_l^\beta - 1$ variable dont le poids est le poids frontière de $g_{\alpha-2\beta}$. On peut ainsi calculer le nombre total des variables de g_α.

Ici le groupe adjoint n'est pas un groupe fondamental. C'est en effet le groupe g_1^2 qui a trois couches de poids : les poids frontières correspondant chacun à une variable; les poids frontières de g_2 correspondant chacun à une seule variable; enfin le poids o qui correspond à l variables. Ce groupe g_1^2 est celui qui indique comment g_1 transforme linéairement entre elles les quantités $x_i x_k$

$$(i, k = \pm 1, \ldots, \pm l).$$

XVII. — Groupes fondamentaux du type D).

41. Les résultats sont ici tout à fait analogues à ceux du type B). Le groupe fondamental g_1 est à 2^{l-1} variables qu'on peut noter

$$x_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_l},$$

où les ε_i sont égaux à ± 1 et ont un produit égal à -1. Les transformations de g_1 sont

$$X_{ij} = \Sigma\, \varepsilon_{i+1} \ldots \varepsilon_{j-1} x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{i-1} \alpha_i \varepsilon_{i+1} \ldots \varepsilon_{j-1} \alpha_j \varepsilon_{j+1} \ldots \varepsilon_l} \frac{\partial f}{\partial x_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_i \alpha'_i \varepsilon_{i+1} \ldots \varepsilon_{j-1} \alpha'_j \varepsilon_{j+1} \ldots \varepsilon_l}}$$

$(i, j = \pm 1, \ldots, \pm l;\ \alpha_i = 1$ si $i > 0;\ \alpha_i = -1$ si $i < 0;\ \alpha'_i = -\alpha_i)$.

Le groupe fondamental g_2 est au fond identique à g_1; il est à 2^{l-1} variables qu'on peut noter

$$y_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_l},$$

où les ε_i, égaux à ± 1, ont un produit égal à $+1$. Les transformations de g_2 sont données par les mêmes formules que celles de g_1.

Le groupe fondamental g_3 est le groupe (1) *de la forme quadratique*

$$x_1 x_{-1} + x_2 x_{-2} + \ldots + x_l x_{-l}.$$

Quant aux groupes fondamentaux $g_4, g_5, \ldots, g_l$, ils indiquent respectivement comment g_1 transforme linéairement entre elles les quantités

$$[x_1 x_2], \quad [x_1 x_2 x_3], \quad \ldots, \quad [x_1 x_2 \ldots x_{l-2}]$$

et celles qu'on en déduit par les transformations de g_1. Ils sont respectivement à $C_{2l}^2, C_{2l}^3, \ldots, C_{2l}^{l-2}$ variables.

Il y a ici aussi des relations remarquables entre les groupes g_1, g_2 et les autres groupes fondamentaux. Elles sont tout à fait analogues aux relations indiquées dans le cas du type B).

42. Le cas de $l = 3$ est intéressant, parce que les groupes du type D) sont isomorphes aux groupes du type A). Les groupes fondamentaux du type A) sont respectivement à un nombre de variables égal à

$$l + 1 = 4, \qquad C_{l+1}^2 = 6, \qquad C_{l+1}^3 = 4;$$

---

(1) *C*, p. 141.

les groupes fondamentaux du type D) sont respectivement à un nombre de variables égal à

$$2^{l-1}=4, \qquad 2^{l-1}=4, \qquad C_{2l}^{1}=6.$$

On retrouve naturellement les mêmes nombres de variables, rangés dans un autre ordre. En particulier les deux groupes fondamentaux d'ordre 6 sont pour le type A), le groupe projectif des droites de l'espace, pour le type D) le groupe projectif d'une quadrique de l'espace à 5 dimensions : on sait en effet que ces deux groupes sont semblables.

XVIII. — Groupes fondamentaux du type E) ($l=6$).

43. *Le groupe g_1 est un groupe à 27 variables* que j'ai indiqué dans ma Thèse ([1]). Les variables x_i, y_i, z_{ik} ont pour poids $-\overline{\omega}_i-2\overline{\omega}_0$, $-\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_0+\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_k$.

Le groupe g_4 s'engendre facilement au moyen du précédent en partant de l'expression $[x_5 x_6]$ et lui appliquant les différentes transformations de g_1. Les poids des différentes variables sont les poids frontières de g_4 et ceux de g_3. Au poids dominant $\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_0$ de g_3 peuvent appartenir un certain nombre de variables, combinaisons linéaires des cinq expressions $[x_i z_{1i}]$: on vérifie facilement que toutes ces expressions entrent comme variables. *Par suite le groupe g_4 est celui qui indique comment g_1 transforme les droites de l'espace à 26 dimensions.* Le nombre des variables de g_4 est $\frac{27\times 26}{2}=351$.

Le groupe g_3 est dualistique de g_1 et par suite à 27 variables. Mais il peut aussi se déduire de la manière suivante de g_1. Considérons le groupe g_1^2 qui transforme entre elles la quantité x_6^2 et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1. Les poids frontières de g_3 sont des poids de g_1^2. Considérons alors l'expression

$$u=x_2 z_{12}+x_3 z_{13}+\ldots+x_6 z_{16}$$

qui est de poids $\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_0=\Pi_3$. Elle est invariante par les transformations X_{ijk}, X'_{ijk}; par suite *le groupe qui exprime comment g_1 transforme linéairement l'expression u et celles qui*

([1]) *C*, p. 142.

s'en déduisent par les transformations de g_1, admet Π_3 *comme poids frontière. C'est donc le groupe* g_3. Remarquons d'ailleurs que u n'est autre chose que la dérivée partielle par rapport à y_1 de la forme cubique ([1])

$$J = \Sigma x_i y_k z_{ki} + \Sigma z_{\lambda\mu} z_{\nu\rho} z_{\sigma\tau}$$

invariante par le groupe g_1. *Les différentes variables de* g_3 *sont donc les 27 dérivées partielles de la forme* J.

Le groupe g_5 *est le groupe dualistique de* g_4; il est donc à 351 variables.

Le groupe g_6 est le groupe qui indique comment g_2 transforme l'expression $[x_4 x_5 x_6]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1. Or la transformation X'_{123} appliquée à $[x_4 x_5 x_6]$ donne

$$[x_4 x_5 z_{45}] + [x_4 x_6 z_{46}] + [x_5 x_6 z_{56}];$$

en posant $[x_i x_j x_{ij}] = u_{ij} = u_{ji}$, on en déduit que le groupe g_6 contient les variables $u_{ij} + u_{jk} + u_{ki}$, d'où l'on conclut facilement qu'il contient *toutes* les variables u_{ij} de poids $-3\overline{\omega}_0 = \Pi_2$. De ces variables on déduit par les transformations X_{ij} toutes les expressions trilinéaires possibles de poids $\Pi_1 + \Pi_3$. Par conséquent *le groupe* g_6 *est le groupe qui indique comment* g_1 *transforme les plans (à 2 dimensions) de l'espace à 26 dimensions;* il est à $\frac{27 \times 26 \times 25}{1 \times 2 \times 3} = 2925$ variables.

Reste le groupe g_2 : c'est le groupe adjoint à 78 variables. On peut l'engendrer au moyen du groupe $g_1 g_3$, c'est-à-dire en somme au moyen de g_1. On considère pour cela la forme

$$\sum_{i,k} \overline{x}_i x_k z_{ik}$$

avec deux séries de 27 variables supposées transformées chacune par le groupe g_1. *Le groupe* g_2 *indique comment* g_1 *transforme linéairement la forme* $\Sigma \overline{x}_i x_k z_{ik}$ *et celles qu'on en déduit par les transformations de* g_1. La variable $\Sigma \overline{x}_i x_k z_{ik}$ de ce groupe est de poids $\Pi_2 = -3\overline{\omega}_0$.

([1]) *C*, p. 143.

XIX. — Groupes fondamentaux du type E) ($l = 7$).

44. Le groupe fondamental g_2 est le groupe à 56 variables que j'ai indiqué dans ma Thèse ([1]). Les variables

$$x_i, \quad y_i, \quad x_{ik}, \quad y_{ik}$$

sont respectivement de poids

$$\overline{\omega}_0 - \overline{\omega}_i, \quad \overline{\omega}_i - \overline{\omega}_0, \quad \overline{\omega}_0 + \overline{\omega}_i + \overline{\omega}_k, \quad -(\overline{\omega}_0 + \overline{\omega}_i + \overline{\omega}_k).$$

Le groupe fondamental g_4 est celui qui indique comment g_2 transforme entre elles l'expression $[y_1 y_2]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_2. On trouve facilement que toutes les expressions $[uv]$ formées avec deux des 56 variables de g_2 entrent comme variables de g_4, exception faite pour les $[y_i x_i]$ et $[x_{ik} y_{ik}]$ qui n'entrent que par leurs différences. Le groupe g_4 est donc à $\frac{56 \times 55}{2} - 1 = 1539$ variables.

Le groupe fondamental g_6 est celui qui indique comment g_2 transforme entre elles l'expression $[y_1 y_2 y_3]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_2. Au poids $\Pi_1 + \Pi_2$ appartiennent les cinq variables $[y_1 y_i y_{i7}]$; au poids Π_3 appartiennent les 21 variables $[y_i y_k y_{ik}]$, au poids Π_2 appartiennent 56 variables à saisir les différences mutuelles des 27 quantités $[y_1 y_i x_i]$, $[y_1 x_{1i} y_{1i}]$ et $[y_1 x_{ik} y_{ik}]$, et ensuite les quantités $[y_i x_{1j} y_{ij}]$. En résumé, le groupe g_6 a $C_{56}^3 - 56 = 27664$ variables.

Le groupe g_1 est le groupe *adjoint* à 133 variables. On peut l'engendrer au moyen du groupe g_2. *Il indique en effet comment g_2 transforme entre elles la forme quadratique $\Sigma y_i y_{i7}$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_2.*

Le groupe g_3 est celui qui indique comment g_2 transforme la forme $\Sigma \overline{y_i y_j y_{ij}}$ de poids Π_3 et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_2.

Le groupe g_5 peut s'engendrer au moyen du groupe adjoint g_1. Si l'on appelle e'_{007} la variable $\Sigma y_i y_{i7}$ de poids Π_1 *le groupe g_5 indique comment g_1 transforme $[e'_{006} e'_{007}]$ et les quantités qui s'en déduisent par les transformations de g_1.*

Enfin le groupe g_7 indique comment g_2 transforme

([1]) *C*, p. 143.

$[e'_{005}e'_{006}e'_{007}]$ *et les quantités qui s'en déduisent par les transformations de* g_1.

On peut aussi engendrer les groupes g_5 et g_7 au moyen des variables de g_2.

XX. — Groupes fondamentaux du type E) ($l = 8$).

45. *Le groupe* g_1 *est le groupe adjoint à* 248 *variables* e_{ik}, e_{ijk}, e'_{ijk}.

Le groupe g_3 *est le groupe qui indique comment* g_1 *transforme l'expression* $[e_{18}e_{19}]$ *et celles qui s'en déduisent par les transformations de* g_1.

Le groupe g_5 *est celui qui indique comment* g_2 *transforme l'expression* $[e_{17}e_{18}e_{19}]$ *et celles qui s'en déduisent par les transformations de* g_1.

Le groupe g_7 *est celui qui indique comment* g_1 *transforme l'expression* $[e_{16}e_{17}e_{18}e_{19}]$ *et celles qui s'en déduisent par les transformations de* g_1.

Le groupe g_8 *est celui qui indique comment* g_1 *transforme l'expression* $[e_{15}e_{16}e_{17}e_{18}e_{19}]$ *et celles qui s'en déduisent par les transformations de* g_1.

Le groupe g_2 peut aussi s'engendrer au moyen de g_1. *C'est le groupe qui indique comment* g_1 *transforme la forme quadratique* $\Sigma e_{1i}e_{12i}$ *de poids* Π_2 *et celles qui s'en déduisent par les transformations de* g_1.

Le groupe g_6 peut alors s'engendrer au moyen du groupe g_2. Si l'on appelle ξ_{ij} les variables $\Sigma e_{i\rho}e_{ij\rho}$ de g_2, *le groupe* g_6 *est celui qui indique comment* g_2 *transforme l'expression* $[\xi_{12}\xi_{13}]$ *et celles qui s'en déduisent par les transformations de* g_2.

Enfin le groupe g_4 se déduit aussi de g_1. *C'est celui qui indique comment* g_1 *transforme l'expression* $\Sigma[e_{1i}e_{1j}e_{1ij}]$ *de poids* Π_4 *et celles qui s'en déduisent par les transformations de* g_1.

XXI. — Groupes fondamentaux du type F).

46. Le groupe g_1 est le groupe linéaire à 26 variables que j'ai indiqué dans ma Thèse [1]. Ces variables

$$y, \quad z, \quad x_i, \quad x_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

---

[1] *C*, p. 145.

sont respectivement de poids

$$0, \quad 0, \quad \omega_i, \quad \frac{\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma + \omega_\delta}{2}.$$

Le groupe g_2 est le groupe adjoint à 52 *variables. C'est celui qui indique comment g_1 transforme entre elles l'expression*

$$\xi_{12} = [x_1 x_2] - [x_{1234} x_{123'4'}] + [x_{123'4} x_{1234'}]$$

de poids Π_2 et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1.

Le groupe g_3 est celui qui indique comment g_1 transforme entre elles l'expression $[x_1 x_{1234}]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1. Il est à 273 variables, les poids homologues de Π_2 correspondant chacun à 2 variables, les poids homologues de Π_1 à 5 variables et le poids o à 9 variables.

Enfin *le groupe g_4 est le groupe qui indique comment g_2 transforme l'expression $[\xi_{12}\xi_{13}]$ de poids Π_4 et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_2.* Il est à 1274 variables.

XXII. — Groupes fondamentaux du type G).

47. Le groupe g_1 est le groupe à 7 variables indiqué dans ma Thèse [1]. Ces variables x_i, y_i, z sont respectivement de poids $-\overline{\omega_i}$, $+\overline{\omega_i}$ et o.

Le groupe g_2 est le groupe adjoint à 14 variables. Il peut s'engendrer au moyen de g_1. *C'est celui qui indique comment g_1 transforme entre elles l'expression $[x_3 y_1]$ de poids Π_2 et celles qu'on en déduit par les transformations de g_1.* Les 14 variables de g_2 sont :

$$[x_i y_k] \quad (i \neq k;\ i, k = 1, 2, 3),$$
$$[2 z x_i] - (ijk)[y_j y_k],$$
$$[2 z y_i] - (ijk)[x_j x_k],$$
$$[x_1 y_1] - [x_3 y_3], \qquad [x_2 y_2] - [x_3 y_3].$$

---

[1] *C*, p. 146.